MA1 – domácí úkol 8 (diferenciální rovnice)

(1.) $y' = \dfrac{y-1}{2\sqrt{1-x}}$, $\alpha)$ $y(0)=0$; $\beta)$ $y(2)=1$

(i) $1-x>0 \iff x\in(-\infty,1)$, y – lib. , tedy řešení ex. max. v intervalu $(-\infty,1)$, tedy počáteční úloha $\beta)$ nemá řešení!

(ii) $x\in(-\infty,1)$: a) $y_{st}(x)=1$ – stacionární řešení
$x\in(-\infty,1)$

b) $y(x)\neq 1$ – separace proměnných :

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$\ln|y-1| = -\sqrt{1-x}+c \quad , c\in\mathbb{R}$$

$$|y-1| = e^{-\sqrt{1-x}}\cdot e^{c}$$

$$(*)\quad y = 1+K e^{-\sqrt{1-x}} \quad , K=e^{c} \text{ nebo } K=-e^{c}, \text{ tj. } K\neq 0$$

a) + b) : obecné řešení $y_{ob} = 1+Ke^{-\sqrt{1-x}}$, $x\in(-\infty,1)$, $K\in\mathbb{R}$

(iii) počáteční úloha $\alpha)$: $y(0)=0$, tj. $0=1+Ke^{-1} \Rightarrow K=-e$

tj. $y_{pr}(x) = 1-e^{1-\sqrt{1-x}}$, $x\in(-\infty,1)$

Poznámka k (*) :

„odstranění" absolutní hodnoty v $|y-1|$:

$y(x)-1$ je fce spojitá v $(-\infty,1)$, $y(x)\neq 1 \Rightarrow y(x)-1>0$ v $(-\infty,1)$
nebo $y(x)-1<0$ v $(-\infty,1)$,

tedy, pro $y(x)-1>0$, $x\in(-\infty,1)$ je $|y(x)-1| = y(x)-1$, tj. v (*) je $K=e^{c}$

a pro $y(x)-1<0$, $x\in(-\infty,1)$ je $|y(x)-1| = -(y(x)-1)$, tj. v (*) je $K=-e^{c}$.

(2) $y' + \frac{x}{y} = 0$, $y \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (tj. pro podmínku lze volit $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq 0$)

(i) separace proměnných:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$y^2 = -x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = C \qquad (\Rightarrow C > 0)$$

a $y = \sqrt{C - x^2}$, $x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$

nebo $y = -\sqrt{C - x^2}$

(ii) řešení počáteční úlohy:

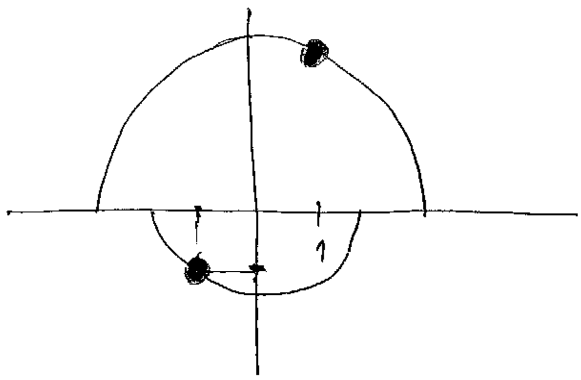
a) $y(1) = 3$, pak $C = 1^2 + 3^2 = 10$ a $y(x) > 0$, tj.

$y_{poč}(x) = \sqrt{10 - x^2}$, $x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$

b) $y(-1) = -1$: $C = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$, $y(x) < 0$ a tedy

$y_{poč}(x) = -\sqrt{2 - x^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) $y(2) = 0$ nemá řešení ($y(x) \neq 0$)



③ $y' = 2x(1-y)$, $x\in R$, $y\in R$

a) $y_{st}(x) = 1$, $x \in R$

b) $y(x) \neq 1$ (separace proměnných)

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int 2x\,dx$$

$$-\ln|1-y| = x^2 + c \quad , c\in R$$

$$|y-1| = e^{-x^2} \cdot e^{c}$$

(odstranění ab. hodnoty viz př. 1) $\quad y(x) = 1 + K e^{-x^2}$, $K \neq 0$, $x \in R$

a) + b) – obecné řešení $y_{ob}(x) = 1 + K e^{-x^2}$, $K\in R$, $x \in R$

c) počáteční úlohy

(i) $y(0) = 0$: $0 = 1 + K \Rightarrow K = -1$ a

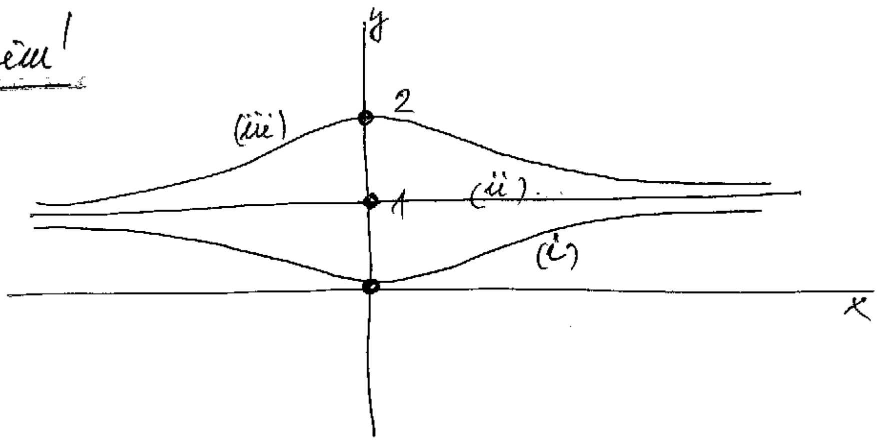
$y_{pč}(x) = 1 - e^{-x^2}$, $x\in R$

(ii) $y(0) = 1$: $y_{st}(x) \equiv 1$, $x \in R$

(iii) $y(0) = 2$: $2 = 1 + K \Rightarrow K = 1$ a

$y_{pč}(x) = 1 + e^{-x^2}$

Hodnocení řešení



(4) $y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = x, \quad y(0)=1$ $\quad - (x \in R,\ y \in R)$

(lineární dif. rovnice 1. řádu, řešení – nejprve řešení rovnice bez pravé strany, pak variace konstant)

a) $y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = 0$

(i) $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ pro $y(x) \neq 0$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$|y| = e^{c} \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

$$y = K\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad K \neq 0$$

a (ii) $y_{stac}(x) = 0$

tj. $y_{OH}(x) = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$, $K \in R$, $x \in R$

(z (i) a (ii))

b) variace konstant: $y(x) = K(x)\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ a dosazení

$$K'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + K(x)\left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}\cdot 2x\right) + K(x)\,\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x$$

tj. $K'(x) = x\sqrt{1+x^2}$ a

$$K(x) = \int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(1+x^2)^{3/2}\,\frac{2}{3} + c = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c$$

$c \in R$

a tedy $y_{OB}(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)$, $x \in R$, $c \in R$

Řešení počáteční úlohy: $y(0) = 1$, tj.

$$1 = c + \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

a

$$y_{pč}(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2), \quad x \in R$$

(5) $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, y = 1$, $y(0)=1$

$x \in (-\infty, 1)$

a) $y_H(x)$: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, y$ a separace ((i) $y_{st}(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty,1)$)

(ii) pro $y(x) \neq 0$: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$

$$\ln|y| = -2\sqrt{1-x} + c \quad , c \in R$$

$$y = K e^{-2\sqrt{1-x}} \quad , x \in (-\infty,1), K \neq 0$$

a ((i) a (ii)) $y_H(x) = K e^{-2\sqrt{1-x}}$, $x \in (-\infty,1)$, $K \in R$

b) variace konstant : $y(x) = K(x) e^{-2\sqrt{1-x}}$ a pak řeš. pro $K(x)$

dosazení : $K'(x) e^{-2\sqrt{1-x}} + K(x) e^{-2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot K(x) e^{-2\sqrt{1-x}} = 1$

tj. $K'(x) e^{-2\sqrt{1-x}} = 1$ a

$K'(x) = e^{2\sqrt{1-x}}$

a pak $K(x) = \int e^{2\sqrt{1-x}}\, dx = \frac{1}{2} e^{2\sqrt{1-x}} (1 - 2\sqrt{1-x}) + c$, $c \in R$

$$\left(\int e^{2\sqrt{1-x}}\, dx = \left| \begin{array}{l} 2\sqrt{1-x} = t \\ x = 1 - \frac{t^2}{4} \\ dx = -\frac{t}{2}\, dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int t e^t\, dt \underset{PP}{=} -\frac{1}{2}\left(t e^t - e^t\right) = -\frac{1}{2} e^{2\sqrt{1-x}} (1 - 2\sqrt{1-x}) \right)$$

řeš : $y_{OŘ}(x) = c e^{-2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{1-x})$, $x \in (-\infty,1)$, $c \in R$

c) počáteční úloha : $y(0) = 1$

$$1 = c e^{-2} - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2} e^2$$

a $y_{PŘ}(x) = \frac{3}{2} e^{2(1-\sqrt{1-x})} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x})$, $x \in (-\infty,1)$